Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiele:

1. Werfen eines Würfels

ω	1	2	3	4	5	6
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

A: „Augenzahl gerade“

$$A=\{2,4,6\} \quad \Rightarrow P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

B: „Augenzahl größer als 2“

$$B=\{3,4,5,6\} \quad \Rightarrow P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

C: „Augenzahl 2 oder 3“

$$C=\{2,3\} \quad \Rightarrow P(C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

2. Werfen einer Münze

ω	K	Z
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

> Ein Zufallsexperiment, bei dem die Elementarereignisse alle gleichwahrscheinlich sind, nennt man Laplace-Experiment.

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten bei Laplace-Experimenten:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{\text{Anzahl der Ereignisse, bei denen A eintritt}}{\text{Anzahl aller (gleichwahrscheinlichen) Ereignisse}}$$

3. Wahrscheinlichkeiten beim Roulette

A: „Zahl 7“ $\quad P(A)=\frac{1}{37}$

B: „das erste Dutzend“ $\quad P(B)=\frac{12}{37}$

C: „rote Zahlen“ $\quad P(C)=\frac{18}{37}$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen bei mehrstufigen Zufallsexperimenten

Beispiele:

1. Zweimaliges Werfen einer Münze

Baumdiagramm:

$\Omega =$

A: „zweimal Kopf“

B: „einmal Kopf und einmal Zahl“

C: „mindestens einmal Kopf“

Gegenereignis von C:

Für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe eines Baumdiagramms gelten folgende Regeln:

1. Die Wahrscheinlichkeiten eines Elementarereignisses ergibt sich als Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf den Teilstrecken dieses Pfades.

2. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses erhält man als Summe der Wahrscheinlichkeiten der Pfade, die zu diesem Ereignis gehören.

3. Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten, die von einem Verzweigungspunkt ausgehen, ist stets 1.

2. In einer Urne befinden sich vier rote, zwei gelbe und eine weiße Kugel.
   Es werden zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
   Bestimmen Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.

   A: „zwei rote Kugeln“

   B: „genau eine rote Kugel“

   C: „zwei Kugeln mit gleicher Farbe“

   D: „mindestens eine weiße Kugeln“

   E: „höchstens eine weiße Kugel“

   F: „letzte Kugel muss gelb sein“

   G: „Kugeln sind verschiedenfarbig“

3. In einer Urne befinden sich vier rote, zwei gelbe und eine weiße Kugel.
   Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
   Bestimmen Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.

   A: „zwei gleichfarbige Kugeln“

   B: „zwei weiße Kugeln“

   C: „höchstens zwei rote Kugeln“

   D: „keine rote Kugel“

   E: „mindestens eine rote Kugel“

1.

$$\Omega=\left\{KK,KZ,ZK,ZZ\right\}$$

$$A=\left\{KK\right\}\quad\Rightarrow P(A)=\frac{1}{4}$$

$$B=\left\{KZ,ZK\right\}\quad\Rightarrow P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$C=\left\{KZ,ZK,KK\right\}\quad\Rightarrow P(C)=\frac{3}{4}$$

$$\overline{C}:\text{"keinmal Kopf"}\quad\overline{C}=\left\{ZZ\right\}\quad\Rightarrow P(\overline{C})=\frac{1}{4}$$

2.

$$\Omega=\{rr,rg,rw,gr,gg,gw,wr,wg,ww\}$$

$$A=\left\{rr\right\}\quad\Rightarrow P(A)=\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7}=\frac{16}{49}\approx 32{,}7\%$$

$$B=\left\{rg,rw,gr,wr\right\}$$

$$P(B)=\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{7}+\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{4}{7}=\frac{24}{49}\approx 49{,}0\%$$

$$C=\left\{rr,gg,ww\right\}\quad\Rightarrow P(C)=\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7}+\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}=\frac{21}{49}\approx 42{,}9\%$$

$$D=\left\{rw,gw,wr,wg,ww\right\}$$

$$P(D)=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}=\frac{13}{49}\approx 26{,}5\%$$

$$E=\left\{rr,rg,rw,gr,gg,gw,wr,wg\right\}\quad\overline{E}=\left\{ww\right\}$$

$$\Rightarrow P(\overline{E})=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{49}\quad\Rightarrow P(E)=1-P(\overline{E})=1-\frac{1}{49}=\frac{48}{49}\approx 98{,}0\%$$

$$F=\left\{rg,gg,wg\right\}$$

$$P(F)=\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{7}+\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{7}=\frac{14}{49}\approx 28{,}6\%$$

$$G=\left\{rg,rw,gr,gw,wr,wg\right\}\quad\Rightarrow P(G)=\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{7}+\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{7}+\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{7}=\frac{28}{49}\approx 57{,}1\%$$

3.

$\Omega = \{rr, rg, rw, gr, gg, gw, wr, wg\}$

$A = \{rr, gg\} \quad \Rightarrow P(A) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{14}{42} \approx 33{,}3\%$

$B = \emptyset \quad \Rightarrow P(B) = 0$

$C = \{gg, gw, wg, rg, rw, gr, wr, rr\} = \Omega \quad \Rightarrow P(C) = 1$

$D = \{gg, gw, wg\} \quad \Rightarrow P(D) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42} \approx 14{,}3\%$

Gegenereignis zu E: $\overline{E}$: "keine rote Kugel"

$\Rightarrow P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{6}{42} = \frac{36}{42} \approx 85{,}7\%$

<u>Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsverteilungen:</u> Axiome von Kolmogorow

Eine Funktion P, die jedem Ereignis E der Ergebnisraumes genau eine reelle Zahl zuordnet, heißt Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $P(E) \geq 0$ für jedes Ereignis $E \subseteq \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

<u>Folgerungen:</u>

1. $E = \{\omega_1, ..., \omega_n\} \quad \Rightarrow P(E) = P(\{\omega_1\}) + ... + P(\{\omega_n\})$
2. Für jedes Ereignis E gilt: $0 \leq P(E) \leq 1$
3. $E = \emptyset \quad \Rightarrow P(E) = 0$
4. Wenn E und $\bar{E}$ Gegenereignisse sind, dann gilt: $P(E) = 1 - P(\bar{E})$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
6. Sonderfall für drei Ereignisse: Formel von Sylvester
   $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$